Ingeniero JUAN SNITCOFSKY

Aplicaciones estructurales de la cuña hiperbólica

Análisis geométrico y estático de una forma espacial obtenida a partir de sectores de paraboloide hiperbólico, en procura de obtener una cúpula de planta rectangular y bordes horizontales, apta para ser utilizada como cubierta industrial de hormigón armado. Se adopta una superficie que, admitido su comportamiento en estado membranal, bajo la acción de las cargas permanentes se encuentra libre de esfuerzos de flexión en todos sus miembros de borde.

INTRODUCCION

El presente artículo describe una estructura laminar desarrollada para satisfacer simultáneamente un severo conjunto de requerimientos planteado por la construcción de una cubierta industrial de hormigón armado, requerimientos que podemos sintetizar así:

a) Naves de planta rectangular apoyadas en sus cuatro vértices, hacia los cuales deben escurrir las aguas pluviales.

b) Posibilidad de crecimiento en cualquier dirección. (Módulo repetitivo de aprox. 15 x 13m).

c) Bordes horizontales, coincidentes con la altura mínima solicitada para los locales, de modo de facilitar el aventanamiento o cierre vertical de cualquier módulo.

d) Iluminación y/o ventilación cenital.

e) Dada la prohibición de dejar tensores al aire o de construir contrafuertes de apoyo, queda establecida la condición de nulidad de empujes horizontales en los vínculos.

Por razones de índole económica agreguemos:

f) Superficies de doble curvatura con miras a obtener formas para las cuales pueda asumirse razonablemente el comportamiento membranal.

g) Superficies doblemente regladas para facilitar la construcción de los moldes.

Para dar cumplimiento a estas condiciones, se adoptó una combinación de ocho lóbulos en paraboloide hiperbólico de planta triangular, conformando una figura cuyas propiedades se analizan en lo que sigue.

I) ELEMENTOS GEOMETRICOS

En la fig. 1 se han representado las superficies regladas 1 y 2, referidas a la terna ortogonal X-Y-Z. Se trata de dos paraboloides hiperbólicos rectos y de eje vertical, que se intersectan según la curva O-M-S, y cuyas expresiones algebraicas son:

$$z_1 = kx\,(y - b) \qquad \text{(I-1)}$$
$$z_2 = ky\,(x - a) \qquad \text{(I-2)}$$

En virtud de que:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z_2}{\partial x\,\partial y} = k$$

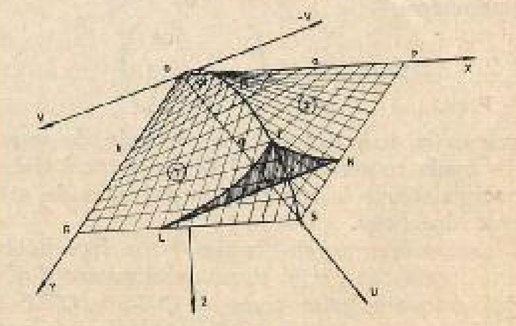

FIGURA 1

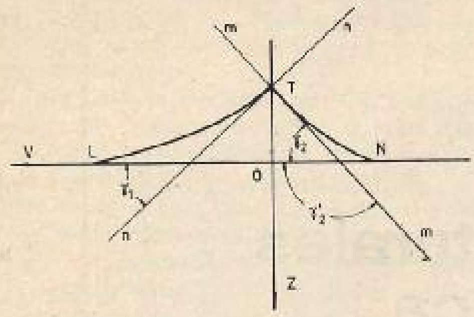

FIGURA 2

las dos superficies tienen el mismo módulo de alabeo y por lo tanto son dos paraboloides hiperbólicos idénticos que ocupan distintas posiciones en el espacio.

Por comodidad de operación, referiremos estas superficies a la terna ortogonal U-V-Z, elegiaa de modo de que el eje U contenga los puntos O y S. Las fórmulas para transformar las cordenadas son:

$$x = u \cos \alpha - v \operatorname{sen} \alpha \qquad \text{(I-3)}$$

$$y = u \operatorname{sen} \alpha + v \cos \alpha \qquad \text{(I-4)}$$

en las cuales:

$$\cos \alpha = \frac{a}{d} \quad ; \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{d} \qquad \text{(I-5)}$$

que reemplazadas en (I — 3) y (I — 4):

$$x = \frac{ua - vb}{d} \qquad \text{(I-6)}$$

$$y = \frac{ub + va}{d} \qquad \text{(I-7)}$$

Si introducimos estos valores en (I-1 y (I-2) tendremos:

$$z_1 = k \frac{ua - vb}{d} \left(\frac{ub + va}{d} - b \right) \qquad \text{(I-8)}$$

$$z_2 = k \frac{ub - va}{d} \left(\frac{ua - vb}{d} - a \right) \qquad \text{(I-9)}$$

Cuando en estas ecuaciones hacemos $v = o$ obtenemos:

$$z_1 = z_2 = k\, u \frac{ab}{d} \left(\frac{u}{d} - 1 \right) \qquad \text{(I-10)}$$

que es la ecuación de una parábola de segundo grado contenida en el plano vertical U-Z, y que constituye la arista de intersección de estas dos superficies.

Convendremos en llamar "cuña hiperbólica" a la forma superficial obtenida al adosar (fig. 1) dos casquetes tales como el O-R-S y O-P-S de modo de que tengan en común la arista parabólica O-M-S.

Una cuña hiperbólica queda definida cuando —además de su posición— se conocen sus lados a y b, y su módulo de alabeo k.

Si se verifica que los lados a y b son iguales, diremos que la cuña hiperbólica es equilátere.

La cuña hiperbólica tiene una propiedad geométrica de gran importancia para su aplicación como estructura membranal. Para ponerla en evidencia procederemos a determinar la magnitud C tal que: (fig. 2)

$$C = \operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2 \qquad \text{(I-11)}$$

siendo γ_1 y γ_2 los ángulos que las tangentes n-n y m-m trazadas por el unto T, forman respectivamente con el eje V-V.

Siendo $u = u_1$ la abscisa del punto genérico T, de acuerdo con las (I-8) y (I-9) tendremos:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\partial z_1}{\partial v} = -k \frac{b}{d} \times$$

$$\times \left(\frac{u_1 b + va}{d} - b \right) + \frac{ka}{d^2} (u_1 a - vb)$$

$\operatorname{tg}_v \gamma_2$

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = -\operatorname{tg} \gamma'_2 = \frac{\partial z_2}{\partial v} = - \left[\frac{ka}{d} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{u_1 a - vb}{d} - a \right) - \frac{kb}{d^2} (u_1 b + va) \right]$$

Sumando ordenadamente y operando:

$$C = \operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2 = kd \qquad \text{(I-12)}$$

o sea que la suma de las tangentes de los ángulos γ_1 y γ_2 es independiente de u, por lo tanto es la misma para cualquier sección paralela al plano V-Z que se considere.

II) ESTABILIDAD DE LA CUÑA HIPERBOLICA

En la fig. 3 se ha representado un cuña hiperbólica de vértices O-P-R-S vista según su proyección horizontal. Se supone que ella constituye una estructura membranal sometida a la acción de las cargas verticales g, uniformemente distribuidas (*). En las membranas 1 y 2, las

(*) **Para cuñas hiperbólicas muy rebajadas puede admitirse que el peso propio está uniformemente distribuido sobre la proyección horizontal de la estructura. Sin embargo, es más conveniente, dar estricto cumplimiento a esa hipótesis de carga variando el espesor de la lámina de punto a punto. Para ello, si llamamos δ_o al espesor de la mina en el punto de coordenadas $x = 0$, $y = 0$, y siendo δ el espesor en el punto genérico x, y, deberá verificarse:**

$$\delta = \frac{\delta_o}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}}$$

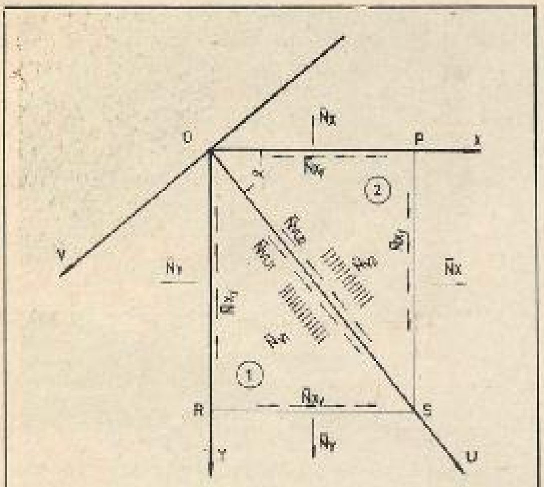

FIGURA 3

tensiones internas ofrecen un cuadro muy particular, definido por las expresiones:

$$\tilde{N}x - \tilde{N}y = O; \qquad \tilde{N}xy = \text{constante} = -\frac{g}{2k} \qquad \text{(II-1)}$$

Las fuerzas que solicitan el arco parabólico O-S pueden estudiarse a partir de sus proyecciones en el plano horizontal (magnitudes ficticias) que analizaremos en dos direcciones ortogonales:

a) Fuerzas distribuidas normales al plano U-Z:

$$\tilde{N}v_1 = \tilde{N}v_2 = -2\,\tilde{N}xy \text{ sen } \alpha \cos \alpha \qquad \text{(II-2)}$$

b) Fuerzas distribuidas contenidas en el plano U-Z:

$$\tilde{N}vu_1 = \tilde{N}vu_2 \qquad \text{(II-3)}$$

Estas últimas se anulan entre sí por tener sentidos opuestos en ambas membranas.

Por lo tanto sólo resta considerar el efecto de las $\tilde{N}v_1$ y $\tilde{N}v_2$. Para ello basta con observar el corte practicado en la fig. 4a, del cual surge el significado de las componentes verticales $\overline{Q}_1$ y $\overline{Q}_2$ que son las únicas activas, y que sumadas nos dan la fuerza Q (fig. 4b), de modo que:

$$Q = \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2 = \tilde{N}v_1 \text{ tg } \gamma_1 + \tilde{N}v_2 \text{ tg } \gamma_2$$

y, de acuerdo con (II-1) y (II-2):

$$Q = -2\tilde{N}xy \text{ sen } \alpha \cos \alpha \, (\text{tg } \gamma_1 + \text{tg } \gamma_2)$$

Si aplicamos ahora la propiedad enunciada en (I-12) y reemplazando Ñxy por su valor se tendrá:

$$Q = gd \text{ sen } \alpha \cos \alpha$$

O bien:

$$Q = \frac{gab}{d} \qquad \text{(II-4)}$$

El numerador de esta fracción es el peso total de la lámina, mientras que el denominador es la cuerda del arco parbólico O-S. Resulta en consecuencia que la estructura descansa íntegramente sobre el referido arco, transmitiéndole su peso como una carga uniformemente distribuida sobre su proyección horizontal. El arco parabólico O-S es, por lo tanto, antifunicular de las cargas Q. Conviene destacar que estas conclusiones están rígidamente subordinadas a la condición Ñxy = constante. Cuando tal condición no se cumple, la arista parabólica queda sometida a un complejo sistema de cargas no coplanares que pueden dificultar seriamente las realizaciones prácticas, particularmente cuando la cuña hiperbólica no es equilátera.

Como se observa, esta figura geométrica ofrece posibilidades ventajosas para su utilización como estructura membranal, dado que une a la simplicidad de generación (doblemente reglada), la ausencia de momentos flectores en sus ner-

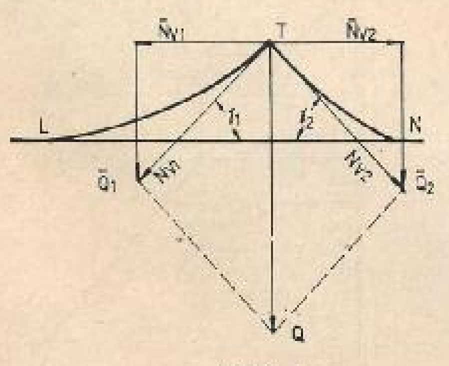

FIGURA 4 a

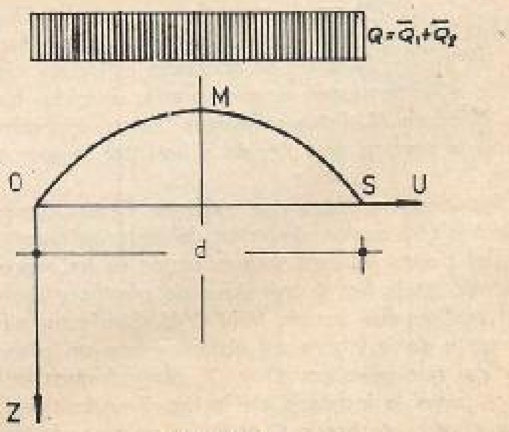

FIGURA 4 b

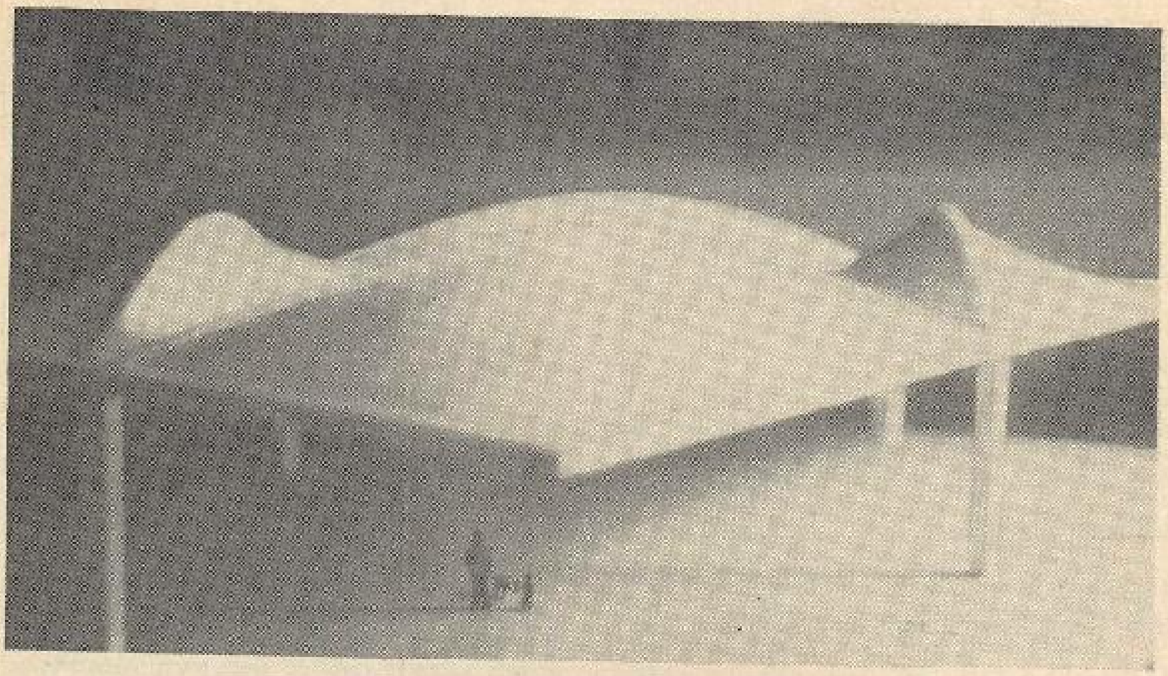

FIGURA 5

vaduras de borde. Se presta asimismo para ser combinada de múltiples maneras, por ejemplo, adosando cuatro de ellas como se muestra en el modelo de la fig. 5.

III) ESTABILIDAD DE SECTORES DE CUÑA HIPERBOLICA

Refiriéndonos a la fig. 6, si de la cuña hiperbólica O-P-S-R extraemos un sector O.L-M.-N tal que:

$$\overline{ON} = b_0 = \mu\, b;\ \overline{OL} = a_0 = \mu\, a;$$

$$\overline{OM} = d_0 = \mu\, d; \qquad \text{(III-1)}$$

donde μ es un coeficiente menor que la unidad, en los bordes N-M y L-M aparecen esfuerzos debidos a las tensiones de membrana, dirigidos hacia el punto M. Estos esfuerzos tienen una componente vertical que tiende a levantar la estructura.

Supongamos ahora que el sector en estudio se adosa a otro sector simétrico del anterior respecto del punto M. Este último sector se ha representado en la fig. 6 con línea de puntos y tiene por vértices los puntos M-N'-O'-L'. Si efectuamos un corte de la figura así obtenida con un plano vertical que pase por O y O', obtendremos una traza como la indicada en la fig. 7. Admitiendo que el arco quebrado O-M-O' es un arco de tres articulaciones, analizaremos el equilibrio del mismo bajo la acción de las fuerzas que le transmiten las dos membranas adyacentes.

Las fuerzas que debemos considerar son:

a) La fuerza uniformemente distribuida Q.

b) Las fuerzas F_1, F_2, F'_1 y F'_2 que corresponden a los bordes N-M, L-M, M-N' y M-L' aplicadas al punto M.

Dado que las componentes horizontales de estas cuatro fuerzas se anulan dos a dos, la resultante es vertical y vale:

$$F = 4\ \bar{N}xy\ f_0 = -\frac{2gfo}{k} \qquad \text{(III-2)}$$

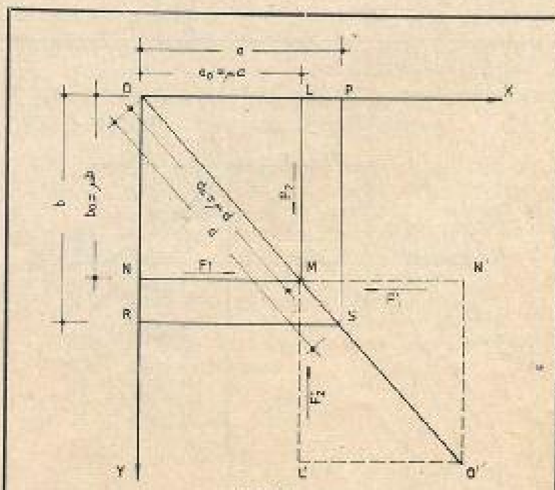

FIGURA 6

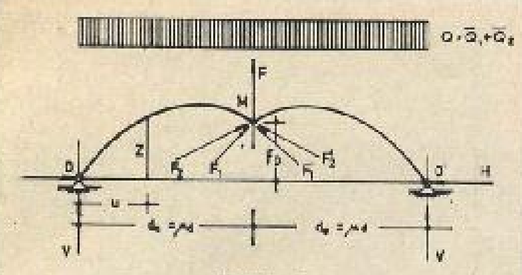

FIGURA 7

Pero según las ecuaciones (I-8) y (I-9) siendo f_0 la ordenada correspondiente a $u = \mu d$, se tendrá:

$$f_0 = k\,\mu\,ab\;(\mu - 1) \qquad \text{(III-3)}$$

que reemplazada en (III-2):

$$F = -\,2\,gab\,\mu\,(\mu - 1) \qquad \text{(III-4)}$$

Por lo tanto, la reacción vertical en cada apoyo valdrá:

$$V = Q\mu d - \frac{F}{2} = \frac{gab}{d}\,\mu d + \frac{2g\,\mu\,ab}{2}\,(\mu - 1)$$

$$V = gab\,\mu^2 \qquad \text{(III-5)}$$

Que es el peso del casquete de lados μa y μb.

El equilibrio del arco de tres articulaciones exige que la reacción horizontal H aplicada a cada apoyo, cumpla con la condición de momento nulo respecto de M, o sea:

$$H = \frac{V\mu d - \dfrac{Q\mu^2 d^2}{2}}{fo}$$

en la que reemplazando valores y operando:

$$H = \frac{\mu - \dfrac{1}{2}}{k\,(\mu - 1)}\;\mu\,gd \qquad \text{(III-6)}$$

El momento flector en un punto genérico de abscisa u del arco O-M — O' tiene la siguiente expresión:

$$Mu = V\,u - \frac{Q\,u^2}{2} - H\,z \qquad \text{(III-7)}$$

en la cual, reemplazando valores resulta:

$$Mu = gab\,\mu^2\,u - \frac{gabu^2}{2d} - \frac{\mu - 1/2}{k\,(\mu - 1)} \times$$

$$\times\; g\,d\,\mu\,\frac{kuab}{d}\,\left(\frac{u}{d} - 1\right)$$

$$Mu = \frac{gabu}{2\,(\mu - 1)}\,(1 - 2\,\mu^2)\,\left(\frac{u}{d} - \mu\right) \qquad \text{(III-8)}$$

Según esta expresión, puede observarse que el coeficiente μ controla tanto la conformación geométrica como el comportamiento mecánico de la estructura. Eligiéndolo convenientemente, pueden obtenerse formas de interés para su aplicación práctica, como se verá a continuación.

IV) CUPULAS CUADRANGULARES CONSTITUIDAS POR SECTORES DE CUÑAS HIPERBOLICAS

Reuniendo cuatro casquetes de cuña hiperbólica (fig. 8) de lados μa y μb, se obtiene una cúpula de planta rectangular de lados $2\mu a$ y $2\mu b$.

Esta cúpula presenta cuatro bordes horizontales, en los que se pueden alojar cómodamente las armaduras de tracción necesarias para equilibrar tanto los empujes producidos por los arcos, como los esfuerzos debidos a las fuerzas membranales. Para evitar deformaciones excesivas, es muy conveniente postensar esas armaduras.

Si se atribuye a μ el valor:

$$\mu = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(IV-1)}$$

se obtiene una cúpula como la representada en la fig. 8, y según la ecuación (III-8), los arcos triarticulados que la sustentan resultan libres de momentos flectores. La depresión que puede observarse en el centro de la cúpula le confiere un aspecto insólito que la aparta de lo que el juicio intuitivo aceptaría como un diseño eficiente.

Las figuras 9a, 9b, 9c y 9d muestran la realización práctica que dio origen al presente desarrollo. En este caso, los cuatro sectores de cuña hiperbólica que la constituyen fueron distanciados entre sí para dar cabida a los lucernarios requeridos por el proyecto. El valor de μ adoptado es

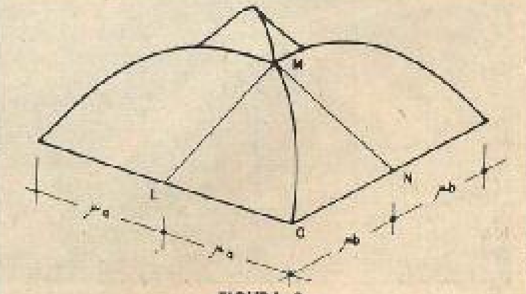

FIGURA 8

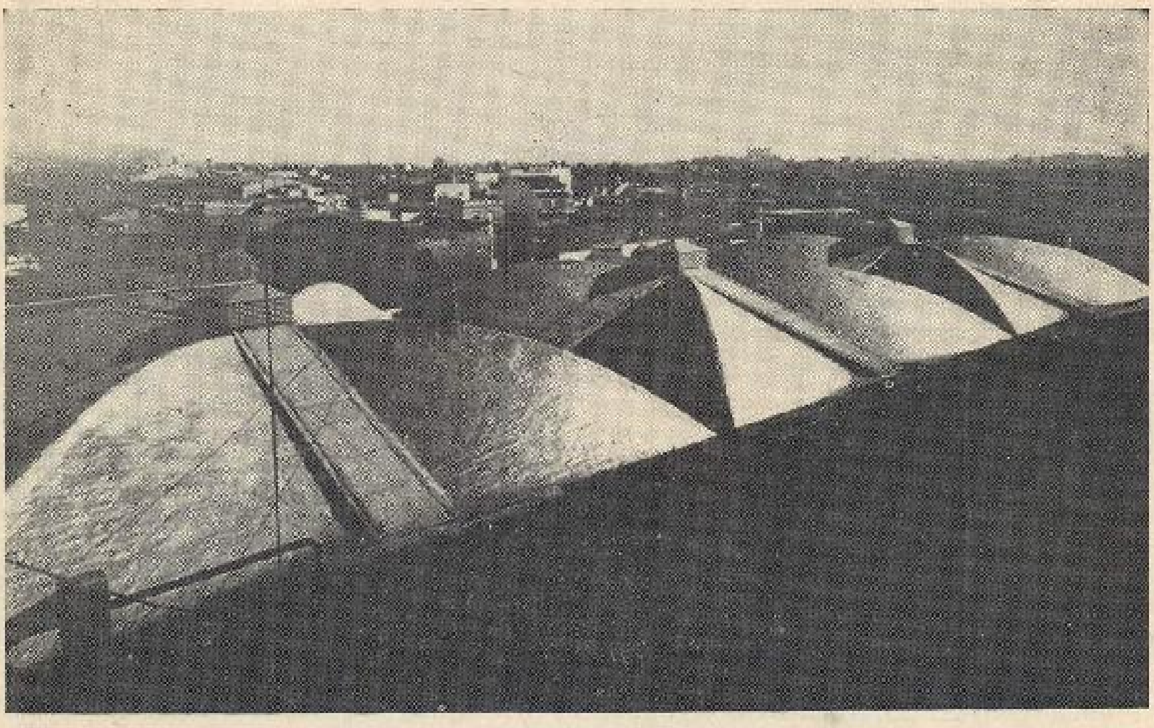

FIGURA 9 a

FIGURA 9 c

FIGURA 9 b

FIGURA 9 d

ligeramente inferior al establecido en (IV-1) con el objeto de crear una componente dirigida hacia arriba capaz de equilibrar el peso de la linterna. (* *)

CONCLUSION:

Las conocidas limitaciones de la teoría membranal imponen al proyectista de láminas una gran prudencia y sensatez en la consideración de sus diseños, en procura de obtener estructuras suficientemente rígidas y sujetas a tensiones moderadas. Salvada esta dificultad, la aplicación de ese modelo matemático queda ampliamente justificada por una larga experiencia constructiva, con la ventaja adicional de su limpieza y facilidad de operación. Entendemos que existe aún un vasto campo inexplorado en esta rama de la estabilidad, particularmente en cuanto respecta al estudio de nuevas formas geométricas. Para dar impulso a este proceso será necesario elaborar y difundir métodos de cálculo simples y rápidos, de modo de incorporarlos a la rutina de los constructores, sin el esfuerzo que representa el abordar los complejos desarrollos matemáticos que propone la literatura especializada.

Con esto se enriquecerá no sólo el campo de las realizaciones concretas, sino también el de la investigación teórica, realimentada a su vez por la experiencia tangible que la práctica ofrece. Por otra parte, sería necesario incluir en nuestros Reglamentos Técnicos las normas que regulen la construcción de estructuras laminares, normas que, con su doble función restrictiva y orientadora, contribuirán sin duda el uso más generalizado de estas estructuras, sobre cuya racionalidad y economía huelga todo comentario.

Agradecimientos:

Agradezco al Ing. Justo Segura Godoy las observaciones formuladas con motivo de la obra que ilustra este trabajo, y al Ing. Ricardo E. Snitcofsky su colaboración en el planteo y desarrollo analítico del mismo.

(**) **Para equilibrar una carga permanente P actuando en el centro de la cúpula sin introducir momentos flectores en los arcos portantes, debe cumplirse la relación:**

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{P}{2gab}\right)}$$